#035★★★☆ 2022.2.14 / 2023.7.29

標準正規分布の確率密度関数の曲線下面積。

次の正規分布の確率密度関数において、

$$f(x|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

特に平均値が 0、分散が 1 の場合を標準正規分布という。その面積は 1 となることが証明されている。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|0,1^2)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

証明方法としては、ガウス積分を用いる例、そのガウス積分の証明のために極座標を用いるなどの工夫がされている。例えば、ホームページ「高校数学の美しい物語、https://manabitimes.jp/math 」が参考になる（“高校数学の美しい物語”、”ガウス積分”）で検索できる)。読者が数式を丁寧にフォローできて、親切なサイトである。

標準正規分布の累積分布関数は次のようになる。

$$F(x|0,1)=\int_{-\infty}^{K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

テスト問題の質の評価などで、項目反応理論（Item Response Theory, IRT）という解析理論がある。この理論では、ロジスティック回帰モデルを用いた評価がなされるが、

$$\int_{-\infty}^{a(\theta-b)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\cong\frac{1}{1+exp\{-1.7\cdot a\cdot(x-b)\}}$$

の近似的関係を用いて、ロジスティック関数と正規分布関数とを関連付けている。図は、$a=1.2$、$b=1.5$としたときの両式のグラフを示す（実線が標準正規分布の累積分布関数（左辺)、点線がロジスティック曲線（右辺)、一点鎖線は標準正規分布の確率密度関数)。実線と点線がほぼ重なっていることがわかる。