#036★★★☆ 2022.3.7 / 2023.7.29

誤差伝搬則～二つの変数を加減乗除したときの平均、標準偏差の近似値。

x、y をある変数とし、$f(x,y)$ をこれらの変数を用いた関数とする。x、y の期待値（平均値）、分散をそれぞれ $E(x)$、$E(y)$、$V(x)$、$V(y)$ とするとき、関数 $f(x,y)$ の平均値、分散は次のように得られる。テイラー展開を利用した近似値である。∂ は偏微分を表し、下付添字はこの値での微分を求めることを意味する。

$$E\left(\left(f(x,y)\right)\right) = f\left(E(x),E(y)\right)$$

$$V\left(\left(f(x,y)\right)\right) = \left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\}^2_{E(x),E(y)} \cdot V(x) + \left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}^2_{E(x),E(y)} \cdot V(y)$$

特に四則演算の場合について整理すると次のようになる。

(1) 和：$z = x + y$、期待値：$E(x) + E(y)$ 、分散：$V(x) + V(y)$

(2) 差：$z = x - y$、期待値：$E(x) - E(y)$ 、分散：$V(x) + V(y)$

(3) 積：$z = x \times y$、期待値：$E(x) \times E(y)$ 、分散：$E(y)^2 \cdot V(x) + E(x)^2 \cdot V(y)$

(4) 商：$z = x \div y$、期待値：$E(x) \div E(y)$ 、分散：

$$\left(\frac{1}{E(y)}\right)^2 \cdot V(x) + \left(\frac{E(x)}{E(y)^2}\right)^2 \cdot V(y)$$

（補足 1）

$z = x \times y$ のとき、

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = y\,,\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = x$$

$z = x \div y$ のとき、

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}\,,\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{x}{y^2}$$

（補足 2）テイラー展開と一次近似

ある関数 $f(x)$ について次の式のように展開して級数を得ることをテイラー展開という。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots$$

特に $a = 0$ のとき次のようになり、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$

さらに例えば $f(x) = exp(x)$ のとき、一次微分までの項で近似（一次近似）すると次のようになる。

$$exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots \cong 1 + x$$

（続きます）

テイラー展開で、$a = \bar{x}$ （$\bar{x}$ は平均値）として一次近似すると、

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - \bar{x})^2 + \cdots \cong (\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

となり、変数 $f(x,y)$ についても同様に定義すると、偏微分を定義して

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \cdot (x - \bar{x}) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} \cdot (y - \bar{y})$$

となる。以後は表記を簡単にするため、$x = \bar{x}$、$y = \bar{y}$ は省略する。

合成関数の平均値は

$$\overline{f(x,y)} = f(\bar{x},\bar{y})\text{、すなわち } E\left(\left(f(x,y)\right)\right) = f\left(E(x),E(y)\right)$$

となる。分散は、

$$\begin{aligned}
V_f &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i,y_i) - f(\bar{x},\bar{y})\}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot (x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot (y_i - \bar{y})\right\}^2 \\
&= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \\
&+ 2\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\
&\cong \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 \cdot V_x + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 \cdot V_x
\end{aligned}$$

と得られる。展開したときの右辺第三項は 0 に近似する。標準偏差は分散の平方根として次式。

$$SD = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 \cdot V_x + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 \cdot V_y} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 \cdot {SD_x}^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 \cdot {SD_y}^2}$$

以上のことは、3 つ以上の変数でも同様に近似できる。それぞれの変数が独立していて（相関がない）、正規分布に従うことが前提。

$$\overline{f(x,y,z)} = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

$$SD_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right)^2 \cdot {SD_x}^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right)^2 \cdot {SD_y}^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)^2 \cdot {SD_z}^2}$$